

复旦大学附属复兴中学 2026 学年第一学期 10 月质量检测练习
高一年级数学试卷

参考答案与解析

答案速查

1. $\{2\}$
2. $(-3, 2)$
3. $[-1, 5]$
4. $[1, +\infty)$
5. $2\sqrt{2}$
6. $\{-1, -\frac{3}{4}\}$
7. $[\frac{3}{4}, 1]$
8. $(1, +\infty)$
9. $2028 + 2\sqrt{2026}$
10. 4
11. 五个数中的最小数可能为 18 或 19，原题条件不能唯一确定；若求最小可能值，则为 18。
12. ①③
13. C
14. B
15. D
16. B

逐题解析

1. 参考答案: $\{2\}$

参考解析:

由 $y = -x^2 + 2 \leq 2$, 且每个不大于 2 的实数都能取到, 得 $B = (-\infty, 2]$ 。又 $A = [2, +\infty)$, 所以 $A \cap B = \{2\}$ 。

2. 参考答案: $(-3, 2)$

参考解析:

由原不等式的解集为 $(-2, 3)$, 可知 $a < 0$, 且 $ax^2 + bx + c = a(x+2)(x-3) = a(x^2 - x - 6)$, 所以 $b = -a$, $c = -6a$ 。于是 $bx^2 - ax - c = -a(x^2 + x - 6) = -a(x+3)(x-2)$ 。因 $-a > 0$, 所求不等式等价于 $(x+3)(x-2) < 0$, 解集为 $(-3, 2)$ 。

3. 参考答案: $[-1, 5]$

参考解析:

原命题为假, 等价于对任意 $x \in \mathbb{R}$ 都有 $x^2 - 2ax + 4a + 5 \geq 0$ 。二次项系数为正, 所以需且只需判别式 $\Delta = (-2a)^2 - 4(4a + 5) = 4(a-5)(a+1) \leq 0$, 解得 $-1 \leq a \leq 5$ 。

4. 参考答案: $[1, +\infty)$

参考解析:

按绝对值的零点 $-3, 2$ 分类。当 $x < -3$ 时, $|x+3| - |x-2| = -5$, 不满足条件; 当 $-3 \leq x < 2$ 时, 左边为 $2x+1$, 由 $2x+1 \geq 3$ 得 $1 \leq x < 2$; 当 $x \geq 2$ 时, 左边恒为 5, 均满足条件。合并得解集 $[1, +\infty)$ 。

5. 参考答案: $2\sqrt{2}$

参考解析:

由柯西不等式, $(\sqrt{2a} + \sqrt{b})^2 \leq (1^2 + 1^2)(2a + b) = 8$, 故 $\sqrt{2a} + \sqrt{b} \leq 2\sqrt{2}$ 。当且仅当 $2a = b$ 时取等号, 结合 $2a + b = 4$ 得 $a = 1, b = 2$, 符合正数条件, 所以最大值为 $2\sqrt{2}$ 。

6. 参考答案: $\{-1, -\frac{3}{4}\}$

参考解析:

原方程等价于 $x^2 - x + a + 1 = 0$ 且 $x \neq 1$, 判别式为 $\Delta = -4a - 3$ 。若 $\Delta = 0$, 则 $a = -\frac{3}{4}$, 唯一实根 $x = \frac{1}{2}$ 合法。若 $\Delta > 0$, 二次方程有两个不同实根, 要使原方程只有一个解, 必须有一个根为被排除的 1; 代入得 $a = -1$, 此时两根为 0、1, 原方程仅有解 0。若 $\Delta < 0$, 无实根。故 $a \in \{-1, -\frac{3}{4}\}$ 。

7. 参考答案: $[\frac{3}{4}, 1]$

参考解析:

原不等式等价于 $2a - \frac{1}{2} < x < a + 2$ 。开区间中唯一的整数为 2, 需且只需 $1 \leq 2a - \frac{1}{2} < 2 < a + 2 \leq 3$ 。分别解得 $a \geq \frac{3}{4}, a < \frac{5}{4}, a > 0, a \leq 1$, 取交集即 $[\frac{3}{4}, 1]$ 。

8. 参考答案: $(1, +\infty)$

参考解析:

“ α 是 β 的必要条件”等价于 $\beta \Rightarrow \alpha$ 。若 $m > 1$, 则 $3m - 4 > -m$, 因此 $x < 3m - 4$ 或 $x > -m$ 对每个实数 x 都成立, 蕴含关系成立。若 $m \leq 1$, 取 $x = 3m - 4$, 则 $x \leq -1 < 2$, 故 β 成立; 但 $x < 3m - 4$ 不成立, 且 $x = 3m - 4 \leq -m$, 故 $x > -m$ 也不成立, α 不成立。综上 $m > 1$ 。

9. 参考答案: $2028 + 2\sqrt{2026}$

参考解析:

由 $a + b = 1$ 和柯西不等式, $\frac{1}{a} + \frac{2026}{b} \geq \frac{(1 + \sqrt{2026})^2}{a + b} = 2027 + 2\sqrt{2026}$ 。所以 $\frac{a+1}{a} + \frac{2026}{b} = 1 + \frac{1}{a} + \frac{2026}{b} \geq 2028 + 2\sqrt{2026}$ 。等号在 $b = \sqrt{2026}a$, 即 $a = \frac{1}{1 + \sqrt{2026}}$ 、 $b = \frac{\sqrt{2026}}{1 + \sqrt{2026}}$ 时成立, 故所求最小值为 $2028 + 2\sqrt{2026}$ 。

10. 参考答案: 4

参考解析:

第一方程可化为 $(x - a)^2 = 1$, 故 $x_1 = a - 1$ 、 $x_2 = a + 1$, 有 $x_2 - x_1 = 2$ 。第二方程的判别式为 $\Delta_y = (a + 2)^2 - 4(2a - 1) = (a - 2)^2 + 4 > 0$, 故 $y_2 - y_1 = \sqrt{(a - 2)^2 + 4}$ 。集合 M 对应的区域为矩形, 其面积 $S = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = 2\sqrt{(a - 2)^2 + 4} \geq 4$, 等号当且仅当 $a = 2$ 时成立。

11. 参考答案: 五个数中的最小数可能为 18 或 19, 原题条件不能唯一确定; 若求最小可能值, 则为 18。

参考解析:

设五个正整数的总和为 s 。任取四数的五个和为 $s - a_1, \dots, s - a_5$, 每个原数恰好被计入四次, 所以五个和相加等于 $4s$ 。

这五个和只有四种不同取值 86, 92, 96, 98, 故其中恰有一个值重复两次。记重复值为 r , 则 $4s = 86 + 92 + 96 + 98 + r = 372 + r$ 。由于 s 为整数, r 必须是 4 的倍数, 故只有 $r = 92$ 或 $r = 96$ 两种情况。

当 $r = 92$ 时, $s = 116$, 原五数为 30, 24, 24, 20, 18, 最小数为 18; 当 $r = 96$ 时, $s = 117$, 原五数为 31, 25, 21, 21, 19, 最小数为 19。两组均为正整数, 且四数和的集合都恰好是 $\{86, 92, 96, 98\}$ 。

因此, 按原题文字, 最小数并不唯一; 只有将问题理解为“这个最小数的最小可能值”时, 答案才唯一为 18。

12. 参考答案: ①③

参考解析:

①正确。取 $A = \{0\}$, 显然对加法、乘法封闭, 且为有限集。

②错误。仍取 $A = \{0\}$, 则 $A \neq \mathbb{R}$, 但 $1, -1 \in \bar{A}$, 而 $1 + (-1) = 0 \notin \bar{A}$, 所以补集不具有性质 P 。

③正确。任取 $x, y \in A_1 \cap A_2$, 因两集合都具有性质 P , 故 $x + y$ 、 xy 同时属于 A_1 和 A_2 , 也就属于 $A_1 \cap A_2$ 。又交集非空, 所以具有性质 P 。

④错误。取 $A_1 = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ 、 $A_2 = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$, 两者均对加法、乘法封闭。但 $2, 3 \in A_1 \cup A_2$, 而 $2 + 3 = 5 \notin A_1 \cup A_2$ 。

所以真命题的序号为①③。

13. 参考答案: C

参考解析:

A 正确: 函数 $y = x^3$ 在实数范围内严格递增, 所以 $a > b$ 时有 $a^3 > b^3$ 。

B 正确: $a > 1$ 且 $b > 1$ 可推出 $ab > 1$; 反过来不成立, 例如 $a = b = -2$ 。

C 错误: $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的解为 $x = 1$ 或 $x = 2$, 所以 “ $x = 1$ ” 只是该方程成立的充分非必要条件。

D 正确: p 是 q 的充分非必要条件表示 $p \Rightarrow q$, 但 $q \nRightarrow p$, 等价于 q 是 p 的必要非充分条件。故选 C。

14. 参考答案: B

参考解析:

因为 $x^2 - ax - b < 0$ 的解集为 $(1, 3)$, 所以 $x^2 - ax - b = (x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$ 。比较系数得 $a = 4$ 、 $b = -3$, 故 $b^a = (-3)^4 = 81$, 选 B。

15. 参考答案: D

参考解析:

设方案一每次买入的数量均为 $u > 0$, 平均单位成本为 $C_1 = \frac{a_1 u + a_2 u}{2u} = \frac{a_1 + a_2}{2}$ 。设方案二每次花费均为 $v > 0$, 平均单位成本为 $C_2 = \frac{2v}{v/a_1 + v/a_2} = \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2}$ 。两次单价均为正数, 且 $a_1 \neq a_2$, 故 $C_1 - C_2 = \frac{(a_1 - a_2)^2}{2(a_1 + a_2)} > 0$ 。因此无论两次单价的大小关系如何, 方案二的平均购买成本都更低, 选 D。

16. 参考答案: B

参考解析:

展开乘积 $(1-9)(1-3)(1+0)(1+3)(1+9)(1+15)$ 时, 每一项对应从六个元素中选一个子集并求其元素之积; 常数项 1 对应空集。因此全部非空子集的厚度之和为 $(1-9)(1-3)(1+0)(1+3)(1+9)(1+15) - 1 = (-8)(-2) \cdot 1 \cdot 4 \cdot 10 \cdot 16 - 1 = 10239$, 选 B。

17. (1) 参考答案: $A = \{0, 1\}$; 其所有子集为 $\emptyset$ 、 $\{0\}$ 、 $\{1\}$ 、 $\{0, 1\}$ 。

参考解析:

由 $x \in \mathbb{N}$, 有 $x \geq 0$, 从而 $x + 2 > 0$ 。于是 $\frac{3}{x+2} \geq 1$ 等价于 $3 \geq x + 2$, 即 $x \leq 1$ 。故 $A = \{0, 1\}$, 其子集共 $2^2 = 4$ 个, 分别是 $\emptyset$ 、 $\{0\}$ 、 $\{1\}$ 、 $\{0, 1\}$ 。

17. (2) 参考答案: $\overline{A \cup B} = \{3, 4, 5\}$ 。

参考解析:

由 $A = \{0, 1\}$ 、 $B = \{2, 6\}$, 得 $A \cup B = \{0, 1, 2, 6\}$ 。相对于全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 取补集, 得 $\overline{A \cup B} = \{3, 4, 5\}$ 。

18. (1) 参考答案: $20 \text{ m} \leq AD \leq 40 \text{ m}$ 。

参考解析:

设 $AD = x \text{ m}$ 。由容积与深度可知底面积为 $\frac{1200}{3} = 400 \text{ m}^2$, 所以 $AB = \frac{400}{x} \text{ m}$ 。由 $AD \geq AB$ 及 $x > 0$, 得 $x \geq 20$ 。

池底造价为 $400 \times 120 = 48000$ 元, 四面池壁的总面积为 $2 \times 3(x + \frac{400}{x})$ 平方米, 故总造价为 $C(x) = 48000 + 600(x + \frac{400}{x})$ 。

由 $C(x) \leq 78000$, 得 $x + \frac{400}{x} \leq 50$ 。因 $x > 0$, 等价于 $x^2 - 50x + 400 \leq 0$, 即 $(x - 10)(x - 40) \leq 0$, 解得 $10 \leq x \leq 40$ 。结合 $x \geq 20$, 故 $20 \leq x \leq 40$ 。

18. (2) 参考答案：底面设计为边长 20 m 的正方形，深度为 3 m；最低总造价为 72000 元。

参考解析：

设 $AD = x$ m, 则 $AB = \frac{400}{x}$ m, $x \geq 20$, 总造价为 $C(x) = 48000 + 600(x + \frac{400}{x})$ 。由基本不等式, $x + \frac{400}{x} \geq 2\sqrt{400} = 40$, 所以 $C(x) \geq 48000 + 600 \times 40 = 72000$ 。等号当且仅当 $x = \frac{400}{x}$, 即 $x = 20$ 时成立。此时底面为边长 20 m 的正方形, 深度仍为 3 m。

19. (1) 参考答案： $[-3, 2]$ 。

参考解析：

当 $a = 2$ 时, $f(x) = |x + 2| + |x - 1|$ 。若 $x < -2$, 则 $f(x) = -2x - 1$, 由 $f(x) \leq 5$ 得 $-3 \leq x < -2$; 若 $-2 \leq x \leq 1$, 则 $f(x) = 3 \leq 5$, 均符合; 若 $x > 1$, 则 $f(x) = 2x + 1$, 由 $f(x) \leq 5$ 得 $1 < x \leq 2$ 。合并得解集 $[-3, 2]$ 。

19. (2) 参考答案：最小值为 $\frac{5+2\sqrt{6}}{2}$; 当 $a = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 、 $b = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 时取得。

参考解析：

由绝对值不等式, $f(x) = |x + a| + |x - \frac{a}{2}| \geq |(x + a) - (x - \frac{a}{2})| = \frac{3a}{2}$ 。当 $-a \leq x \leq \frac{a}{2}$ 时等号成立, 所以 $m = \frac{3a}{2}$ 。代入 $m + \frac{3}{2}b = 3$, 得 $a + b = 2$ 。
于是 $2(\frac{3}{a} + \frac{2}{b}) = (\frac{3}{a} + \frac{2}{b})(a + b) = 5 + \frac{3b}{a} + \frac{2a}{b} \geq 5 + 2\sqrt{6}$ 。等号当且仅当 $\frac{3b}{a} = \frac{2a}{b}$, 即 $a : b = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ 时成立。结合 $a + b = 2$, 得 $a = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 、 $b = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$, 均为正数。故最小值为 $\frac{5+2\sqrt{6}}{2}$ 。

20. (1) 参考答案： $a \in [-2, 3]$ 。

参考解析：

当 $A = \mathbb{R}$ 时, p 为真等价于方程 $x^2 - 2ax + 2a^2 - a - 6 = 0$ 有实根, 即判别式 $\Delta = (-2a)^2 - 4(2a^2 - a - 6) = 4(3 - a)(a + 2) \geq 0$ 。解得 $-2 \leq a \leq 3$ 。

20. (2) 参考答案： $a \in [-2, 0) \cup (3, 4]$ 。

参考解析：

当 $A = \mathbb{R}$ 时, p 为真对应 $a \in [-2, 3]$ 。

由三角不等式, $|x - 2| - |x - a| \leq |a - 2|$, 并且在 $x = a$ 时取等号。因此对任意实数 x 都有 $|x - 2| - |x - a| \leq 2$, 等价于 $|a - 2| \leq 2$, 即 q 为真对应 $a \in [0, 4]$ 。

若 p 真、 q 假, 得 $a \in [-2, 0)$; 若 p 假、 q 真, 得 $a \in (3, 4]$ 。故所求范围为 $[-2, 0) \cup (3, 4]$ 。

20. (3) 参考答案：不存在这样的正实数 m 。

参考解析：

若“ p 为假命题”是“ q 为真命题”的必要条件, 则必须有 q 为真推出 p 为假。

对任意给定的 $m > 0$, 取 $a = 2$ 。此时对所有 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $|x - 2| - |x - a| = 0 \leq m$, 故 q 为真。

但 p 中的方程化为 $x^2 - 4x = x(x - 4) = 0$, 其根 0、4 均属于 $A = [-2, 0] \cup [1, +\infty)$, 故 p 也为真, “ p 为假命题”不成立。

因此对任意 $m > 0$, 必要性均不成立, 更不可能成为必要非充分条件。故不存在所求正实数 m 。

21. (1) 参考答案： β 为 $(0, 1, 1, 1)$ 、 $(1, 0, 1, 1)$ 、 $(1, 1, 0, 1)$ 、 $(1, 1, 1, 0)$ 中的任意一个。

参考解析：

因为每个坐标只能为 0 或 1, $d(\alpha, \beta)$ 恰好等于两向量对应坐标不同的位置数。 $\alpha = (1, 1, 1, 1)$, 要使距离为 1, β 必须且只需恰有一个坐标为 0, 其余三个为 1。故共有四个向量： $(0, 1, 1, 1)$ 、 $(1, 0, 1, 1)$ 、 $(1, 1, 0, 1)$ 、 $(1, 1, 1, 0)$ 。

21. (2) 参考答案：最大值为 $\min\{10, 2n - 10\}$, 即当 $5 \leq n < 10$ 时为 $2n - 10$, 当 $n \geq 10$ 时为 10。

参考解析：

因 γ 的每个坐标都是 1, $d(\alpha, \gamma) = d(\beta, \gamma) = 5$ 表示 α 、 β 都恰有五个坐标为 0。

设二者的零坐标下标集合分别为 I 、 J , 则 $|I| = |J| = 5$ 。令 $k = |I \cap J|$, 两向量不同的坐标数为 $d(\alpha, \beta) = |I \setminus J| + |J \setminus I| = 10 - 2k$ 。又 $|I \cup J| = 10 - k \leq n$, 所以 $k \geq \max\{0, 10 - n\}$ 。

若 $5 \leq n < 10$, 取 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 、 $J = \{n - 4, n - 3, n - 2, n - 1, n\}$, 则 $|I \cap J| = 10 - n$, 可得最大距离 $2n - 10$; 若 $n \geq 10$, 取 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 、 $J = \{6, 7, 8, 9, 10\}$, 则两集合不交, 可得最大距离 10。故最大值为 $\min\{10, 2n - 10\}$; 特别地, $n = 5$ 时两向量均为全零向量, 最大距离为 0。

21. (3) 参考答案： T 的元素个数的最大值为 2^{n-1} 。

参考解析：

对任意向量 $\alpha = (a_1, \dots, a_n) \in S_n$, 定义其逐位互补向量 $\alpha^* = (1 - a_1, \dots, 1 - a_n)$ 。二者每个坐标都不同, 故 $d(\alpha, \alpha^*) = n$, 不能同时属于 T 。

S_n 共有 2^n 个元素, 可分成 2^{n-1} 对这样的互补向量。每对至多选一个, 所以 $|T| \leq 2^{n-1}$ 。

取 $T = \{(0, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 2, \dots, n\}$, 则 $|T| = 2^{n-1}$ 。其中任意两向量的第一个坐标相同, 至多在其余 $n - 1$ 个位置不同, 因此距离不超过 $n - 1$ 。此构造达到上界, 故最大值为 2^{n-1} 。