

复旦大学附属复兴中学 2026 学年第一学期

10 月质量检测练习高一年级数学试卷

满分：150 分

一、填空题

本大题共有 12 题，满分 54 分，第 1—6 题每题 4 分，第 7—12 题每题 5 分。考生应在答题纸的相应位置直接填写结果。

1. (4 分) 已知 $A = \{x \mid x \geq 2\}$, $B = \{y \mid y = -x^2 + 2, x \in \mathbb{R}\}$, 则 $A \cap B =$ _____。
2. (4 分) 若关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(-2, 3)$, 则不等式 $bx^2 - ax - c < 0$ 的解集为 _____。
3. (4 分) 若命题“存在 $x \in \mathbb{R}$, 使得 $x^2 - 2ax + 4a + 5 < 0$ ”是假命题, 则实数 a 的取值范围是 _____。
4. (4 分) 不等式 $|x + 3| - |x - 2| \geq 3$ 的解集为 _____。
5. (4 分) 已知 a, b 均为正数, 且 $2a + b = 4$, 则 $\sqrt{2a} + \sqrt{b}$ 的最大值为 _____。
6. (4 分) 若关于 x 的方程 $\frac{x^2+a}{x-1} = 1$ 的解集中只含有一个元素, 则 a 的取值集合为 _____。
7. (5 分) 若关于 x 的不等式 $a - 2 < 2a - x < \frac{1}{2}$ 只有一个整数解 2, 则实数 a 的取值范围为 _____。
8. (5 分) 已知 $\alpha: x < 3m - 4$ 或 $x > -m$, $\beta: x < 2$ 或 $x \geq 4$, 若 α 是 β 的必要条件, 则实数 m 的取值范围是 _____。
9. (5 分) 已知正实数 a, b 满足 $a + b = 1$, 则 $\frac{a+1}{a} + \frac{2026}{b}$ 的最小值为 _____。
10. (5 分) 设 a 为实数, 方程 $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$ 的两根为 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 方程 $y^2 - (a+2)y + (2a-1) = 0$ 的两根为 $y_1, y_2 (y_1 < y_2)$, 集合 $M = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$ 中的所有点组成的平面区域的面积为 S , 则 S 的最小值为 _____。
11. (5 分) 给定 5 个正整数, 从中任取 4 个数求和, 所得的所有和数构成集合 $\{86, 92, 96, 98\}$, 则原来的五个数的最小值是 _____。
12. (5 分) 设 A 是非空数集, 若对任意 $x, y \in A$, 都有 $x + y \in A, xy \in A$, 则称 A 具有性质 P 。给出以下命题:
 - ①若 A 具有性质 P , 则 A 可以是有限集;
 - ②若 A 具有性质 P , 且 $A \neq \mathbb{R}$, 则 $\bar{A}$ 具有性质 P ;
 - ③若 A_1, A_2 具有性质 P , 且 $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, 则 $A_1 \cap A_2$ 具有性质 P ;
 - ④若 A_1, A_2 具有性质 P , 则 $A_1 \cup A_2$ 具有性质 P 。其中所有真命题的序号是 _____。

二、选择题

本大题共 4 小题，满分 18 分，第 13、14 题每题 4 分，第 15、16 题每题 5 分。每题有且只有一个正确选项。考生应在答题纸的相应位置，将代表正确选项的小方格涂黑。

13. (4 分) 下列说法错误的是 ()

- A. 若 $a > b$, 则 $a^3 > b^3$
- B. 已知 $a, b \in \mathbb{R}$, “ $a > 1$ 且 $b > 1$ ” 是 “ $ab > 1$ ” 的充分非必要条件
- C. “ $x = 1$ ” 是 “ $x^2 - 3x + 2 = 0$ ” 的充要条件
- D. 若 p 是 q 的充分非必要条件, 则 q 是 p 的必要非充分条件

14. (4 分) 如果关于 x 的不等式 $x^2 < ax + b$ 的解集是 $\{x \mid 1 < x < 3\}$, 那么 b^a 等于 ()

- A. -81
- B. 81
- C. -64
- D. 64

15. (5 分) 在提瓦特大陆, 水晶矿是锻造武器的重要材料, 价值不菲。旅行者准备购买一批水晶矿, 他决定分两次购买, 并制定了两种方案: 方案一是两次购入相同数量的水晶矿; 方案二是两次购入相同金额的水晶矿。已知他两次购入的单价分别为 a_1, a_2 , 且 $a_1 \neq a_2$, 则下列说法正确的是 ()

- A. 当且仅当 $a_1 > a_2$ 时, 方案一的平均购买成本比方案二更低
- B. 当且仅当 $a_1 > a_2$ 时, 方案二的平均购买成本比方案一更低
- C. 无论 a_1, a_2 的大小关系如何, 方案一的平均购买成本比方案二更低
- D. 无论 a_1, a_2 的大小关系如何, 方案二的平均购买成本比方案一更低

16. (5 分) 当集合 S 是 $\mathbb{R}$ 的非空子集且 S 的元素个数有限, 称 S 的所有元素之积为 S 的“厚度”。集合 $\{-9, -3, 0, 3, 9, 15\}$ 的全部非空子集的厚度之和为 ()

- A. 0
- B. 10239
- C. 2026
- D. -6561

三、解答题

本大题共有 5 题, 满分 78 分。解答下列各题必须在答题纸的相应位置写出必要的步骤。

17. (14 分) 已知全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{x \mid \frac{3}{x+2} \geq 1, x \in \mathbb{N}\}$, $B = \{2, 6\}$ 。

(1) (8 分) 求 A , 并写出 A 的所有子集;

(2) (6 分) 求 $\overline{A \cup B}$ 。

18. (14 分) 某地降雨丰富, 当地市政计划修建露天无盖长方体公共雨水收集池, 其容积为 1200 m^3 , 深为 3 m , 其底面为矩形 $ABCD$, 其中 $AD \geq AB$ 。池底需要做过滤层, 每平方米的造价为 120 元, 池壁每平方米的造价为 100 元。

(1) (6 分) 若雨水收集池的总造价不超过 78000 元, 求 AD 边长的范围;

(2) (8 分) 怎样设计雨水收集池能使总造价最低? 最低总造价是多少?

19. (14分) 已知函数 $f(x) = |x + a| + |x - \frac{a}{2}|$ 。

(1) (6分) 当 $a = 2$ 时, 求不等式 $f(x) \leq 5$ 的解集;

(2) (8分) 设 $a > 0, b > 0$ 且 $f(x)$ 的最小值为 m , 若 $m + \frac{3}{2}b = 3$, 求 $\frac{3}{a} + \frac{2}{b}$ 的最小值。

20. (18分) 设 a, m 为实数, A 为 $\mathbb{R}$ 的非空子集。命题 p : 存在 $x \in A$, 满足 $x^2 - 2ax + 2a^2 - a - 6 = 0$, 命题 q : 对任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $|x - 2| - |x - a| \leq m$ 。

(1) (4分) 若 $A = \mathbb{R}$, p 是真命题, 求实数 a 的取值范围;

(2) (6分) 若 $A = \mathbb{R}, m = 2$, p 与 q 有且只有一个真命题, 求实数 a 的取值范围;

(3) (8分) 若 $A = [-2, 0] \cup [1, +\infty)$, 是否存在正实数 m , 使 “ p 为假命题” 是 “ q 为真命题” 的必要非充分条件? 并说明理由。

21. (18分) 已知集合 $S_n = \{\xi \mid \xi = (x_1, x_2, \dots, x_n), x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 2$)。对于 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n), \beta = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in S_n$, 定义 α 与 β 之间的距离为

$$d(\alpha, \beta) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| + \dots + |a_n - b_n|。$$

(1) (4分) 若 $\alpha = (1, 1, 1, 1) \in S_4$, 写出所有的 $\beta \in S_4$, 使得 $d(\alpha, \beta) = 1$;

(2) (6分) 已知 $\gamma = (1, 1, \dots, 1) \in S_n$, 若 $\alpha, \beta \in S_n$, 并且 $d(\alpha, \gamma) = d(\beta, \gamma) = 5 \leq n$, 求 $d(\alpha, \beta)$ 的最大值;

(3) (8分) 若 T 是 S_n 的子集, 满足: 对任意 $\alpha, \beta \in T$, 都有 $d(\alpha, \beta) \leq n - 1$, 求 T 的元素个数的最大值。