2026 学年第一学期杭州市高三年级教学质量检测
数学试题卷

参考答案与解析

答案速查

1. C

2. B

3. A

4. D

5. B

6. D

7. C

8. A

9. A,B,C

10. A,D

11. A,C,D

12. $-\frac{1}{2}$

13. $\frac{\sqrt{7}}{2}$

14. 4

逐题解析

1. 参考答案： C

参考解析：

由 $z\mathrm{i}+2=2\mathrm{i}$，得 $z=\frac{2\mathrm{i}-2}{\mathrm{i}}=2+2\mathrm{i}$。

所以 $|z|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，故选 C。

2. 参考答案： B

参考解析：

正态分布 $N(2,\sigma^2)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称。-1 关于 2 的对称点为 5，所以 $P(X\leqslant -1)=P(X\geqslant 5)$。

因此 $4a-3=5$，解得 $a=2$，故选 B。

3. 参考答案： A

参考解析：

因为 $0<\frac{\pi}{4}<1$，所以 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=5-\tan\frac{\pi}{4}=4$。

再利用奇函数的性质，得 $f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4$，故选 A。

4. 参考答案： D

参考解析：

将递推式改写为 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$。

因此 $\{a_n+1\}$ 是首项为 $a_1+1=2$、公比为 2 的等比数列，故 $a_n+1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，即 $a_n=2^n-1$，故选 D。

5. 参考答案： B

参考解析：

对 $y=ax-\ln(x+1)$ 求导，得 $y'=a-\frac{1}{x+1}$。

曲线在 $(0,0)$ 处的切线斜率为 $a-1$。由切线方程 $y=2x$，得 $a-1=2$，所以 $a=3$，故选 B。

6. 参考答案： D

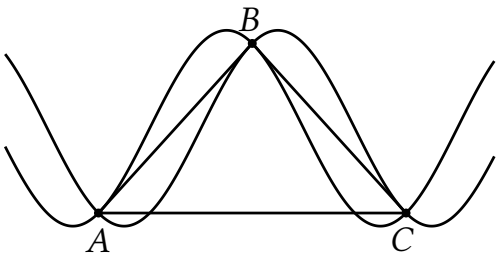
参考解析：

给定模型为 $S(t)=S_{\mathrm{e}}+(S_0-S_{\mathrm{e}})\mathrm{e}^{-\lambda t}$，其中 $S_0<S_{\mathrm{e}}$、$\lambda>0$。

对给定函数求导，得 $S'(t)=\lambda(S_{\mathrm{e}}-S_0)\mathrm{e}^{-\lambda t}$。因为 $\lambda>0$、$S_{\mathrm{e}}-S_0>0$，所以 $S'(t)>0$，即熵随时间增大。

又因为 $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ 随 t 增大而减小，所以 $S'(t)$ 也随之减小，即增速越来越慢，故选 D。

7. 参考答案： C



参考解析：

两曲线的交点满足 $\sin(2x+\varphi)-\sin 2x=2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\left(2x+\frac{\varphi}{2}\right)=0$。

由题意，两条曲线不重合，故 $\sin\frac{\varphi}{2}\neq 0$。于是交点横坐标为 $x_k=\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{4}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，对应的纵坐标为 $y_k=\sin 2x_k=(-1)^k\cos\frac{\varphi}{2}$。

所以，相邻交点的横坐标相差 $\frac{\pi}{2}$，纵坐标互为相反数。三个相邻交点 A,B,C 中，AC 水平，且 $|AC|=\pi$，B 到 AC 的距离为 $2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|$。

由面积条件，得 $\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot 2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$，即 $\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

满足条件的 $|\varphi|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$，故选 C。

8. 参考答案： A

参考解析：

三个圆的圆心分别为 $(1,0)$、$(2,0)$、$(3,0)$，半径均为 1。圆心 $(j,0)$ 到直线 $kx-y=0$ 的距离为 $d_j=\frac{j|k|}{\sqrt{1+k^2}}$。

由弦长公式 $L=2\sqrt{r^2-d^2}$，得 $L_1=\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}$，$L_2=\frac{2\sqrt{1-3k^2}}{\sqrt{1+k^2}}$，$L_3=\frac{2\sqrt{1-8k^2}}{\sqrt{1+k^2}}$。

令 $t=k^2$，则 $0\leqslant t\leqslant\frac{1}{8}$。由 $L_1=L_2+L_3$，得 $1=\sqrt{1-3t}+\sqrt{1-8t}$。

移项后平方，得 $1-3t=2-8t-2\sqrt{1-8t}$，所以 $2\sqrt{1-8t}=1-5t$。

再次平方，得 $4-32t=(1-5t)^2$，即 $25t^2+22t-3=(25t-3)(t+1)=0$。

由于 $t\geqslant 0$，故 $t=\frac{3}{25}$。代回原式，两个根式分别为 $\frac{4}{5}$、$\frac{1}{5}$，满足题意。

因此 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{5}$，故选 A。

9. 参考答案： A,B,C

参考解析：

经验回归直线经过样本中心点 $(\bar{x},\bar{y})=(10,5.2)$，故 $5.2=0.5\times 10+\hat{a}$，得到 $\hat{a}=0.2$，A 正确。

回归直线的斜率为 $0.5>0$，说明 x 与 y 正相关，B 正确。

斜率 0.5 表示：在该经验模型中，光照时间每增加 1h，产量的预测值约增加 $0.5\mathrm{t/hm^2}$，C 正确。

当 $x=11$ 时，$\hat{y}=0.5\times 11+0.2=5.7\neq 7$，故 D 错误。

故选 A、B、C。

10. 参考答案： A,D

参考解析：

抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$，准线为 $x=-1$。

过焦点且与抛物线有两个交点的直线不可能为 x 轴，因此可统一设为 $l:x=ty+1$。设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，联立直线与抛物线方程，得 $y^2-4ty-4=0$，所以 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4$。由 $x_i=ty_i+1$ 或 $x_i=\frac{y_i^2}{4}$，还得 $x_1+x_2=4t^2+2$，$x_1x_2=1$。

A 选项。因为 $y_1y_2<0$，焦点 F 在线段 AB 内。利用抛物线的定义，得 $|AB|=|AF|+|BF|=(x_1+1)+(x_2+1)=4t^2+4\geqslant 4$。当 $t=0$，即 $l:x=1$ 时取等，所以 A 正确。

B 选项。设准线上的点为 $P(-1,p)$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=(x_1+1)(x_2+1)+(y_1-p)(y_2-p)=(4t^2+4)+(-4-4tp+p^2)=(p-2t)^2\geqslant 0$。因此 $\angle APB\leqslant\frac{\pi}{2}$，不可能等于 $\frac{2\pi}{3}$，B 错误。

C 选项。取 $A(1,2)$、$B(1,-2)$、$P(-1,0)$，则 PA、PB 的斜率分别为 1、-1，故 $PA\perp PB$。但直线 $PA:y=x+1$ 与抛物线联立，得 $(x+1)^2=4x$，即 $(x-1)^2=0$，只有一个交点，即 PA 是切线，所以 C 错误。

D 选项。若 P 在 x 轴上，则 $P=(-1,0)$。此时 $k_{PA}+k_{PB}=\frac{y_1}{x_1+1}+\frac{y_2}{x_2+1}=\frac{y_1(x_2+1)+y_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{2ty_1y_2+2(y_1+y_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}=0$。

又因为 A,B 均在 P 的右侧，且 y_1,y_2 异号，所以两条射线 PA,PB 关于 x 轴对称。而 PF 沿 x 轴正方向，因此 $\angle APF=\angle BPF$，D 正确。

故选 A、D。

11. 参考答案： A,C,D

参考解析：

题设要求存在 $\varphi\in\mathbf{R}$、$\theta>0$，使得对所有 $n\in\mathbf{Z}$，都有 $\sin(n\theta+\varphi)\leqslant a$。以下逐项判断。

A 选项。对任意实数 u，均有 $\sin u\geqslant -1$。既然存在满足题意的相位，则必有 $a\geqslant -1$，A 正确。

B 选项。取 $\theta=\pi$、$\varphi=0$，则对所有整数 n，都有 $\sin(n\theta+\varphi)=\sin n\pi=0\leqslant\frac{1}{2}$。因此 $a=\frac{1}{2}$ 时，θ 并不必然等于 $\frac{\pi}{3}$。

事实上，若 $\theta=\frac{\pi}{3}$，在等差数列 $\varphi+n\frac{\pi}{3}$（$n\in\mathbf{Z}$）中取最小的不小于 $\frac{\pi}{3}$ 的一项，该项必小于 $\frac{2\pi}{3}$，其正弦值不小于 $\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{1}{2}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 本身也不可行。B 错误。

C 选项。当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，所有正弦值按周期重复以下四个数：$\sin\varphi$、$\cos\varphi$、$-\sin\varphi$、$-\cos\varphi$。它们的最大值为 $\max\{|\sin\varphi|,|\cos\varphi|\}$。

由 $\sin^2\varphi+\cos^2\varphi=1$，两者不可能都小于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。因此 $a\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，取 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 时恰好达到，C 正确。

D 选项。记 $a_0=\frac{\sqrt{2}}{2}-0.001<\frac{\sqrt{2}}{2}$。

先说明一个事实：若 $0<\delta\leqslant\frac{\pi}{2}$，则无论 φ 取何值，等差数列 $\varphi+n\delta$（$n\in\mathbf{Z}$）中，总有一项落在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ 内。事实上，在所有不小于 $\frac{\pi}{4}$ 的项中取最小的一项，记为 u，就有 $\frac{\pi}{4}\leqslant u<\frac{\pi}{4}+\delta\leqslant\frac{3\pi}{4}$。于是 $\sin u\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}>a_0$。因此，当步长在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ 内时，不可能满足题设上界。

现在分两段排除所有 $0<\theta<\frac{2\pi}{3}$：若 $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，直接应用上述事实即可排除；若 $\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2\pi}{3}$，令 $\delta=2\pi-3\theta$，则 $0<\delta<\frac{\pi}{2}$。又因为对任意 $n\in\mathbf{Z}$，$\sin(\varphi+n\delta)=\sin(\varphi-3n\theta)\leqslant a_0$，所以这个较小步长 δ 也应满足同一上界，与上述事实矛盾。

最后取 $\theta=\frac{2\pi}{3}$、$\varphi=-\frac{\pi}{2}$。此时正弦值只会循环出现 -1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{2}$，均不超过 a_0。因此 θ 的最小值确为 $\frac{2\pi}{3}$，D 正确。

故选 A、C、D。

12. 参考答案： $-\frac{1}{2}$

参考解析：

由 $a+b=c$，两边取模的平方，得 $|a|^2+2a\cdot b+|b|^2=|c|^2$。

三个向量都是单位向量，故 $1+2a\cdot b+1=1$，从而 $a\cdot b=-\frac{1}{2}$。

13. 参考答案： $\frac{\sqrt{7}}{2}$

参考解析：

设 $|PF_2|=t$，则 $|PF_1|=3t$。由双曲线定义，得 $2a=\big||PF_1|-|PF_2|\big|=2t$，所以 $a=t$。

在 $\triangle F_1PF_2$ 中，由余弦定理，得 $(2c)^2=(3t)^2+t^2-2\cdot 3t\cdot t\cos 60^\circ=7t^2$。

所以 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{2}$。

14. 参考答案： 4

参考解析：

一个有 r 个元素的有限集合有 2^r 个子集。题设集合恰有 4 个子集，说明满足不等式的整数 x 恰有两个。

当 $x=0$ 时，不等式左边恒为 $-2<0$，所以 0 必在集合中。接下来只需使其他整数解恰有一个。

若整数 $a\leqslant 0$，对任意负整数 $x=-k$（$k\geqslant 1$），有 $x\mathrm{e}^x-ax-2=-k\mathrm{e}^{-k}+ak-2<0$。此时负整数解有无穷多个，不合题意。

若 $a=1$ 或 $a=2$，则 $x=-1,0,1$ 都满足不等式：当 $x=-1$ 时，$a-2-\mathrm{e}^{-1}<0$；当 $x=1$ 时，$\mathrm{e}-a-2<0$。因此至少有三个整数解，也不合题意。

以下只需考虑整数 $a\geqslant 3$。对于 $x=-k$（$k\geqslant 1$），$x\mathrm{e}^x-ax-2=ak-k\mathrm{e}^{-k}-2>3k-k-2=2k-2\geqslant 0$，所以没有负整数解。

对于正整数 x，不等式等价于 $a>\mathrm{e}^x-\frac{2}{x}$。函数 $g(x)=\mathrm{e}^x-\frac{2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格递增，因为 $g'(x)=\mathrm{e}^x+\frac{2}{x^2}>0$。

要使正整数解只有 $x=1$，充要条件为 $\mathrm{e}-2<a\leqslant \mathrm{e}^2-1$。结合 $a\geqslant 3$ 及 $\mathrm{e}^2-1\approx 6.389$，得到 $a=3,4,5,6$。

故满足条件的整数 a 共有 4 个。

15.（1） 参考答案： $\sin B\sin C=\frac{3}{5}$。

参考解析：

由三角形面积公式和已知条件，得 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3a^2}{10\sin A}$，整理为 $\frac{bc\sin^2 A}{a^2}=\frac{3}{5}$。

由正弦定理，$\frac{b}{a}=\frac{\sin B}{\sin A}$，$\frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}$，代入即得 $\sin B\sin C=\frac{3}{5}$。

15.（2） 参考答案： $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}$。

参考解析：

由两角和与差的余弦公式及 $A+B+C=\pi$，有 $2\sin B\sin C=\cos(B-C)-\cos(B+C)=\cos(B-C)+\cos A$。

由（1）及题设条件，得 $\frac{6}{5}=\frac{2}{5}+\cos A$，所以 $\cos A=\frac{4}{5}$。

因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$。

利用题设面积表达式，得 $S_{\triangle ABC}=\frac{3a^2}{10\sin A}=\frac{3}{10\times\frac{3}{5}}=\frac{1}{2}$。

16.（1） 参考答案： $a_n=n$。

参考解析：

已知条件可写成 $2S_n=na_{n+1}$。

当 $n=1$ 时，$a_2=2S_1=2$。当 $n\geqslant 2$ 时，又有 $2S_{n-1}=(n-1)a_n$。

两式相减，得 $2a_n=na_{n+1}-(n-1)a_n$，即 $na_{n+1}=(n+1)a_n$，从而 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$。

结合 $a_1=1$、$a_2=2$，得到 $\frac{a_n}{n}=1$，所以 $a_n=n$。

16.（2） 参考答案： $P_n=2-\frac{2}{n+1}$，$Q_n=2-\frac{1}{2^{n-1}}$；当 $n\geqslant 2$ 时，$P_n<Q_n$。

参考解析：

由（1），$S_n=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$。

因此利用裂项相消，得 $P_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=2-\frac{2}{n+1}$。

另一方面，Q_n 是首项为 1、公比为 $\frac{1}{2}$、共 n 项的等比数列之和，故 $Q_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$。

于是所证不等式等价于 $\frac{2}{n+1}>\frac{1}{2^{n-1}}$，也就是 $2^n>n+1$。

当 $n\geqslant 2$ 时，由二项式定理，$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}>1+n$，所以 $P_n<Q_n$ 成立。

17.（1） 参考答案： $a=\frac{1}{16}$。

参考解析：

因为 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)\in E_a$，所以 $a^{1/4}=\frac{1}{2}$，得到 $a=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$。

检验另一条曲线的方程：$\log_{1/16}\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$。因此两条曲线的条件均满足，所求为 $a=\frac{1}{16}$。

17.（2）（i） 参考答案： $b\ln b=c\ln c$，证明见解析。

参考解析：

由 $(b,c)\in E_a$，有 $c=a^b$，$c=\log_a b$，后一式等价于 $b=a^c$。

因为 $b>0$、$0<a<1$，所以 $0<c<1$；再由 $b=a^c$，得 $0<b<1$。

两式取自然对数，得 $\ln c=b\ln a$，$\ln b=c\ln a$，分别乘以 c、b，即有 $b\ln b=bc\ln a=c\ln c$。

17.（2）（ii） 参考答案： $b+c>\frac{2}{\mathrm{e}}$，证明见解析。

参考解析：

上一问说明，b,c 是函数 $f(x)=x\ln x$ 取同一函数值的两个不同自变量。先用导数确定它们位于极小值点的两侧，再比较关于该点对称的两个位置。

设 $f(x)=x\ln x$，$0<x<1$。求导得 $f'(x)=\ln x+1$，所以 f 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 上严格递减，在 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$ 上严格递增。

不妨设 $b<c$。由 $f(b)=f(c)$ 且 $b\neq c$，它们不可能处在同一个严格单调区间内，也不可能有一个恰为极小值点，因此 $0<b<\frac{1}{\mathrm{e}}<c<1$。

要证明 $c>\frac{2}{\mathrm{e}}-b$，可以比较 $f(c)$ 与 $f\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-b\right)$。由于 $f(c)=f(b)$，于是考虑 $h(x)=f(x)-f\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-x\right)$，$0<x\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$。

当 $0<x<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$h'(x)=\ln x+1+\ln\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-x\right)+1=\ln\left[x\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-x\right)\right]+2$。

又因为 $x\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-x\right)=\frac{1}{\mathrm{e}^2}-\left(x-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^2<\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，所以 $h'(x)<\ln\frac{1}{\mathrm{e}^2}+2=0$。

故 h 在 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$ 上严格递减。由 $h\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=0$ 及 $b<\frac{1}{\mathrm{e}}$，得 $h(b)>0$，即 $f(b)>f\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-b\right)$。

这里 $\frac{1}{\mathrm{e}}<\frac{2}{\mathrm{e}}-b<\frac{2}{\mathrm{e}}<1$，因此 c 和 $\frac{2}{\mathrm{e}}-b$ 均位于 f 的严格递增区间内。结合 $f(c)=f(b)>f\left(\frac{2}{\mathrm{e}}-b\right)$，得到 $c>\frac{2}{\mathrm{e}}-b$，即 $b+c>\frac{2}{\mathrm{e}}$。

18.（1） 参考答案： $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$。

参考解析：

过椭圆中心的弦长最大值为长轴长 $2a$，所以 $2a=4$，$a=2$。

设半焦距为 c。由离心率，得 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $c^2=2$。

因此 $b^2=a^2-c^2=2$，所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$。

18.（2）（i） 参考答案： $MN\perp MG$，证明见解析。

参考解析：

把两点的椭圆方程相减，可以出现 $(u-p)(u+p)$ 这样的因式；再用 N,E,G 共线，把它化成向量数量积为零。

设 $M=(p,q)$，$p>0$、$q>0$，且 $p^2+2q^2=4$。由椭圆关于原点对称，得 $N=(-p,-q)$，$E=(p,0)$。

再设 $G=(u,v)$。直线 NE 的斜率为 $\frac{q}{2p}$，故 $v+q=\frac{q}{2p}(u+p)$。

由于 M,G 均在椭圆上，$p^2+2q^2=u^2+2v^2=4$。相减并因式分解，得 $(u-p)(u+p)+2(v-q)(v+q)=0$。

代入 $v+q=\frac{q}{2p}(u+p)$，整理为 $(u+p)\left[u-p+\frac{q}{p}(v-q)\right]=0$。

因为 $G\neq N$，且直线 NE 不竖直，故 $u+p\neq0$。于是 $p(u-p)+q(v-q)=0$。

又 $\overrightarrow{MN}=(-2p,-2q)$，$\overrightarrow{MG}=(u-p,v-q)$，因此 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MG}=-2[p(u-p)+q(v-q)]=0$，故 $MN\perp MG$。

18.（2）（ii） 参考答案： $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值为 8。

参考解析：

两个三角形共有边 ME，可用正弦定理表示外接圆半径。上一问得到的直角，又使这条公共边所对的两个角互余。

沿用（i）的记号，$M=(p,q)$，$p>0$、$q>0$，$p^2+2q^2=4$；$N=(-p,-q)$，$E=(p,0)$。记 $\alpha=\angle MNE$，两个外接圆的半径分别为 R_1,R_2。

因为 E 在线段 NG 内，$\angle MNG=\alpha$。由 $MN\perp MG$，得 $\angle MGE=\angle MGN=\frac{\pi}{2}-\alpha$。

在 $\triangle MNE$ 与 $\triangle MEG$ 中分别应用正弦定理，得 $R_1=\frac{|ME|}{2\sin\alpha}$，$R_2=\frac{|ME|}{2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}=\frac{|ME|}{2\cos\alpha}$。

因此 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2}=\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$。

下面由坐标计算 α。从 N 出发的射线 NM, NE 与 x 轴正向所成的锐角分别记为 β,γ，则 $\tan\beta=\frac{q}{p}$，$\tan\gamma=\frac{q}{2p}$，$\alpha=\beta-\gamma$。

由两角差的正切公式，$\tan\alpha=\frac{\frac{q}{p}-\frac{q}{2p}}{1+\frac{q^2}{2p^2}}=\frac{pq}{2p^2+q^2}$。

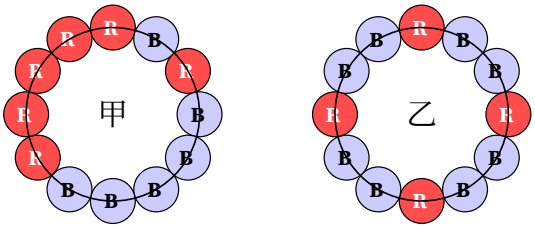
代入面积比，得 $\frac{S_1}{S_2}=\left(\frac{2p^2+q^2}{pq}\right)^2=\left(\frac{2p}{q}+\frac{q}{p}\right)^2$。

由于 $p,q>0$，由基本不等式，$\frac{2p}{q}+\frac{q}{p}\geqslant 2\sqrt{\frac{2p}{q}\cdot\frac{q}{p}}=2\sqrt{2}$，从而 $\frac{S_1}{S_2}\geqslant 8$。

当且仅当 $\frac{2p}{q}=\frac{q}{p}$，即 $q^2=2p^2$ 时取等。结合 $p^2+2q^2=4$，得 $p=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$q=2\sqrt{\frac{2}{5}}$。此点确在椭圆的第一象限，符合题意，所以等号能够取得。

故 $\frac{S_1}{S_2}$ 的最小值为 8。

19.（1） 参考答案：甲是 $(4,3)$—好分链，乙不是 $(4,3)$—好分链。



参考解析：

甲是 $(4,3)$—好分链，乙不是 $(4,3)$—好分链。原题只要求给出判断，下面补充核对过程。

从甲最上方珠子开始，沿顺时针读出的颜色为 $RBRBBBBBRRRR$。

起点分别平移 0、1、2 颗珠子时，四段的红珠数依次为 $(2,0,1,3)$、$(1,0,2,3)$、$(1,0,3,2)$，每种切法都两两不同。再平移 3 颗珠子只会改变各段的编号，因此这已涵盖全部切法。

乙则按 RBB 不断重复，每连续三颗珠子中都恰有一颗红珠，所以各段红珠数总是相同的。

19.（2） 参考答案：对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$(n+1,n)$ 是分链数对，构造及证明见解析。

参考解析：

“分链数对”要求存在一串合适的项链；但对所构造的那一串项链，要求每一种切法都合适。

构造。依次排出下面 $n+1$ 段，每段有 n 颗珠子，再将首尾接起来：R^n、$R^{n-1}B$、$R^{n-2}B^2$、…、RB^{n-1}、B^n。

准确地说，就是按 $j=n,n-1,\ldots,0$ 依次取段 R^jB^{n-j}；当 $n=1$ 时，取 R,B 两段。这里 R^jB^{n-j} 只是表示“先排 j 颗红珠，再排 $n-j$ 颗蓝珠”，不是代数中的乘方。

按原来的分界线切开，各段红珠数为 $n,n-1,\ldots,1,0$，当然两两不同。接下来还要验证任意移动起点之后也满足要求。

选定一个起点后，每隔 n 颗珠子设一道分界线；把起点移动 n 颗，只会改变各段的编号，不会改变分界线。因此只需把全部分界线沿排列方向平移 $t\in\{0,1,\dots,n-1\}$ 颗珠子，便涵盖了全部切法。

验证。考察原来有 j 颗红珠的一段，其中 $1\leqslant j\leqslant n$。它的后一段恰有 $j-1$ 颗红珠，而且各段的红珠都集中在前面。平移后，新段是“原段去掉开头 t 颗，再接上后一段开头 t 颗”。

若 $j>t$，删去的 t 颗和补入的 t 颗都是红珠，新段仍有 j 颗红珠。

若 $j\leqslant t$，原段的 j 颗红珠全部删去，而后一段的 $j-1$ 颗红珠全部补入，新段有 $j-1$ 颗红珠。

原来的全蓝段后面接的是全红段，所以平移后它补入 t 颗红珠，红珠数变为 t。

因此，原来 $j>t$ 的段的新红珠数为 $n,n-1,\dots,t+1$；原来 $1\leqslant j\leqslant t$ 的段的新红珠数为 $t-1,t-2,\dots,0$；原全蓝段的新红珠数为 t。即 $0,1,\dots,n$ 各出现一次。某一组为空时，将该组略去即可。

因为任意 t 都成立，构造出的项链满足所有切法的要求，故对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$(n+1,n)$ 是分链数对。

19.（3） 参考答案： $m=1,2,\dots,n+1$。

参考解析：

必要性。每段只有 n 颗珠子，红珠数只能取 $0,1,\dots,n$ 这 $n+1$ 种数值。要使 m 段的红珠数两两不同，必须有 $m\leqslant n+1$。又 m 是正整数，因此可能的值只能在 $1,2,\dots,n+1$ 中。

充分性。当 $m=1$ 时，只分成一段，“各段红珠数互不相同”自然满足，例如取 n 颗全蓝珠即可。

当 $2\leqslant m\leqslant n+1$ 时，仿照第二问，依次排出以下 m 段，每段均为 n 颗，再首尾相接：$R^{m-1}B^{n-m+1}$、$R^{m-2}B^{n-m+2}$、…、RB^{n-1}、B^n。

准确地说，就是按 $j=m-1,m-2,\dots,0$ 依次取段 R^jB^{n-j}。因为 $m\leqslant n+1$，所有珠子数均为非负整数，构造有意义。各段原红珠数为 $m-1,m-2,\dots,1,0$。

将分界线平移 t 颗珠子，其中 $0\leqslant t\leqslant n-1$。与第二问同理，原来红珠数为 j 的段（$1\leqslant j\leqslant m-1$），平移后删去原段开头 t 颗，接上后一段开头 t 颗。若 $j>t$，新红珠数仍为 j；若 $j\leqslant t$，新红珠数为 $j-1$。

记 $q=\min\{t,m-1\}$，则上述 $m-1$ 段的新红珠数，恰好为 $0,1,\dots,q-1$ 以及 $q+1,q+2,\dots,m-1$。也就是说，$0,1,\dots,m-1$ 中只有 q 尚未出现；某一组为空时略去该组。

原来的全蓝段后面接着有 $m-1$ 颗红珠的第一段，因此平移后，它的红珠数正好为 $\min\{t,m-1\}=q$，恰好补齐缺失的那个数。

所以，无论怎样切分，各段红珠数都恰为 $0,1,\dots,m-1$，两两不同，上述每个 m 均可行。

综上，所求全部正整数为 $m=1,2,\dots,n+1$。

构造的关键是让相邻两段的红珠数依次减少 1，且每段都把红珠排在前面。这样移动分界线时，红珠数只会“保持原数”或“减少 1”；末尾的全蓝段恰好补上缺少的数，所以每种切法都能满足要求。